Analysis für Dummies

von Adam Sosnowski und Markus Mühling

Nach der Vorlesung Analysis I & II im WS 00/01 und SS 01 gehalten von Prof. Dr. Th. Bauer

Kapitel 1: Grundlagen

1. Mengen und Abbildungen

1.1 Abbildungen

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung f: $M \to N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zuordnet. f(x) heißt das Bild von x unter f.

1.2 Hintereinanderausführung von Abbildungen

Seien f: $M \to M'$ und g: $M' \to M''$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : M \to M'' \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition von f und g.

2. Vollständige Induktion

2.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Für jede natürliche Zahl n sei die Aussage A(n) gegeben. Dann gilt:
Alle Aussagen A(n) sind wahr, falls man folgendes zeigen kann:

(i) A(1) ist wahr (Induktionsanfang)

(ii) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt: Falls A(n) wahr ist, dann auch A(n+1) (Induktionsschluß)

2.2 Summen und Produktzeichen

SATZ: **(Summenformel für die geometrische Reihe)**

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{für } x \in \mathbf{R},\ x \neq 1 \text{ und } n \in \mathbf{N}_0$$

Beweisidee: Induktion nach n

2.3 Fakultät

SATZ: Die Anzahl der Anordnungen einer Menge {1,...,n} ist gleich n!.

Beweisidee: Strukturelle Induktion
IS: Zerlegung in n+1 disjunkte Typen (1 an erster Stelle, 2 an erster Stelle,...)

2.4 Binomialkoeffizienten

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten: (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

SATZ: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.
$(k,n \in \mathbf{N},\ k \leq n)$

Beweisidee: Strukturelle Induktion
IS: Zerlegung in Teilmengen, die a_{n+1} enthalten und die es nicht tun

2.5 Der binomische Satz

SATZ: $\forall x,y \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Beweisidee: Kombinatorisch. Es tritt $x^k y^{n-k}$ genau so oft auf, wie es Möglichkeiten gibt, aus den n Faktoren (x+y) k viele Faktoren auszuwählen.

3. Die reellen Zahlen

3.1 Die Körperaxiome

(K1) Kommutativität:	$a + b = b + a$	$\forall a,b \in \mathbf{R}$
	$a \cdot b = b \cdot a$	$\forall a,b \in \mathbf{R}$
(K2) Assoziativität:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	
	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$\forall a,b,c \in \mathbf{R}$
(K3) Neutrales Element:	Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbf{R}$ mit $a + 0 = a$	$\forall a \in \mathbf{R}$
	Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbf{R}$ mit $a \cdot 1 = a$	$\forall a \in \mathbf{R}$
(K4) Inverses Element:	$\forall a \in \mathbf{R}\ \exists -a \in \mathbf{R}$: $a + (-a) = 0$	
	$\forall a \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \exists a^{-1} \in \mathbf{R}$: $a \cdot a^{-1} = 1$	
(K5) Distributivität:	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	$\forall a,b,c \in \mathbf{R}$

Folgerungen:
(1) Die neutralen Elemente 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.
(2) Inverse Elemente -a zu $a \in \mathbf{R}$ und a^{-1} zu $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ sind eindeutig bestimmt.
(3) $-0 = 0$
(4) Für alle $a \in \mathbf{R}$ gilt $-(-a) = a$ und für alle $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ gilt $(a^{-1})^{-1} = a$
(5) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ und $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ $\forall a,b \in \mathbf{R}$
(6) (i) $a \cdot 0 = 0$ $\forall a \in \mathbf{R}$
(ii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ $\forall a,b \in \mathbf{R}$
(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $\forall a,b \in \mathbf{R}$
(7) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ $\forall a,b \in \mathbf{R}$

3.2 Die Anordnungsaxiome

(A1) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der drei Relationen: $a>0$ oder $a=0$ oder $-a>0$
(A2) Aus $a>0$ und $b>0$ folgt $a+b > 0$ und $a \cdot b > 0$
(A3) Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N}$: $n > a$

Folgerungen:

(1)		$a^2 > 0$	$\forall a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$
(2)		$a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Transitivität)	$\forall a,b,c \in \mathbf{R}$
(3)	(i)	$a<b \Rightarrow a + c < b+c$	$\forall a,b,c \in \mathbf{R}$
	(ii)	$a<b \wedge a'<b' \Rightarrow a+a' < b+b'$	$\forall a,a',b,b' \in \mathbf{R}$
(4)	(i)	$a<b \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c$	$\forall a,b \in \mathbf{R}, \forall c \in \mathbf{R}^+$
	(ii)	$0<a<b \wedge 0<a'<b' \Rightarrow a\cdot a'<b\cdot b'$	$\forall a,a',b,b' \in \mathbf{R}$

3.3 Die Betragsfunktion

Eigenschaften der Betragsfunktion: Für $a,b \in \mathbf{R}$ gilt:

(i) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(iii) $|a - b| \geq |a| - |b|$

3.4 Supremum und Infimum

Definition: Beschränktheit

Sei $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$. M heißt nach oben beschränkt, falls $\exists a \in \mathbf{R} \forall x \in M$: $x \leq a$. Die Zahl a heißt dann obere Schranke von M. (analog: untere Schranke)

Definition: Supremum (kleinste obere Schranke)

Sei M nach oben beschränkt. Eine Zahl $s \in \mathbf{R}$ heißt Supremum von M, falls gilt:

(i) s ist obere Schranke von M

(ii) $s \leq s'$ für jede obere Schranke s' von M (analog: Infimum)

Wichtiges Beispiel: $M := \{x \in \mathbf{Q} \mid x>0 \text{ und } x^2 \leq 2\}$, $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$ da $1 \in M$.

Falls $s := \sup M$ existiert, dann gilt $s^2 = 2$ und $s \notin \mathbf{Q}$

3.5 Das Vollständigkeitsaxiom

(V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von **R** hat ein Supremum in **R**. (**Supremumsprinzip**)

R ist (bis auf Isomorphie) der einzige vollständige archimedisch angeordnete Körper.

3.6 Quadratwurzeln

Definition: Quadratwurzeln

Die reelle Zahl $s \geq 0$ mit $s^2 = a$ heißt die Quadtratwurzel von $a \in \mathbf{R}$.

3.7 Das Intervallschachtelungsprinzip

SATZ: **(Intervallschachtelungsprinzip)**

Sei $[a_n,b_n] \subset \mathbf{R}$ für $n \in \mathbf{N}$ gegeben. Falls $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbf{N}$, so existiert ein $c \in \mathbf{R}$ mit $c \in [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Beweis mit (V). Man kann zeigen, daß umgekehrt das Supremumsprinzip (V) aus dem Intervallschachtelungsprinzip folgt.

3.8 Abzählbarkeit

Definition: Abzählbarkeit

Eine Menge M heißt <u>abzählbar</u>, falls es eine bijektive Abbildung f: $M \to \mathbf{N}$ gibt.

<u>SATZ:</u> **Q** ist abzählbar

Beweisidee: Durchnumerierung der (gekürzten) Brüche liefert bijektive Abbildung.

<u>SATZ:</u> **R** ist <u>überabzählbar</u> (d.h. nicht abzählbar aber unendlich)

Beweisidee: Konstruktion einer Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset I_3 ...$ mit $x_n \notin I_n \ \forall n \in \mathbf{N}$.
Widerspruchsbeweis mit Induktion und Intervallschachtelungsprinzip.

Kapitel 2: Folgen und Reihen

4. Grenzwerte und Folgen

4.1 Folgen reeller Zahlen

<u>Definition:</u> Folge
Eine <u>Folge</u> $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ mit $n \mapsto a_n$

<u>Definition:</u> Teilfolge
Sind $n_1 < n_2 < n_3 ...$ natürliche Zahlen, so heißt $(a_{nk})_{k \in \mathbf{N}} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ <u>Teilfolge</u> von $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

<u>Definition:</u> (1) $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, falls $\exists c \in \mathbf{R} \ \forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq c$
(2) $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißt <u>monoton steigend</u>, falls $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_{n+1} \geq a_n$
(analog: nach <u>unten beschränkt</u> und <u>monoton fallend</u>)

4.2 Grenzwerte von Folgen

<u>Definition:</u> Konvergenz, Grenzwert
(a_n) <u>konvergiert</u> gegen $a \in \mathbf{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbf{N}$ gibt mit
$|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$,d.h. $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a
(ε-Umgebung von a = $U_\varepsilon(a) :=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$)
(a_n) heißt <u>konvergent</u>, falls $\exists a \in \mathbf{R}$ mit $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, sonst <u>divergent</u>.
$a := \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ ist dann der <u>Grenzwert</u> der Folge.

<u>Definition:</u> Nullfolge
(a_n) heißt <u>Nullfolge</u>, falls $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ gilt. (d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geq N$: $|a_n| < \varepsilon$)
Es gilt: $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \ \Leftrightarrow \ (a_n - a)_{n \in \mathbf{N}}$ ist Nullfolge

<u>Lemma:</u> (Bernoulli-Ungleichung)
Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Beweisidee: Induktion nach n.

Beispiel: Für $q \in \mathbf{R}$ gilt: (a) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

(b) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ ist divergent

Beweisidee: (a) 1. $\exists x \in \mathbf{R}^+: \frac{1}{|q|} = 1 + x$ 2. Bernoulli

(b) (q^n) ist unbeschränkt da $\mathbf{N}$ unbeschränkt (mit Bernoulli)

4.3 Rechnen mit konvergenten Folgen

SATZ: Falls (a_n) und (b_n) konvergent sind, dann sind auch $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ konvergente Folgen und es gilt: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

Beweisidee: Wähle $\frac{\varepsilon}{2}$ und betrachte $N = \max\{N_1, N_2\}$

SATZ: Ist (a_n) konvergent und $\lim a_n \neq 0$, so existiert ein $N \in \mathbf{N}$ mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq N$.
Die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ist dann konvergent und $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$.

SATZ: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbf{N}$.
Dann gilt: $\lim a_n \leq \lim b_n$ (Nicht $\lim a_n < \lim b_n$!)

4.4 Infimum und Supremum von Folgen

SATZ: Sei (a_n) eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge.
Dann ist (a_n) konvergent und $\lim a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$
(analog: (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow \lim a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$)

4.5 Häufungswerte von Folgen

Definition: **Häufungswert**
$h \in \mathbf{R}$ heißt Häufungswert von (a_n), falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(h)$ ∞-viele Folgenglieder liegen.

SATZ: h Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ besitzt eine Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbf{N}}$, die gegen h konvergiert.

4.6 Der Satz von Bolzano-Weierstraß

SATZ: **(Bolzano-Weierstraß)**
Jede nach oben und unten beschränkte Folge hat einen Häufungswert in $\mathbf{R}$.

Beweisidee: 1. Supremum $s_n := \sup\{a_i \mid i \geq n\}$ existiert nach (V) und $\exists s \in \mathbf{R}$: $-s \leq a_n \leq s$

2. $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\{s_m \mid m \in \mathbf{N}\} =: a$, da s_n nach unten beschränkt und fallend

3. Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbf{N}$ gegeben. $\exists m \in \mathbf{N}$: $|a - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, da $a = \lim s_n$

4. Wähle $m \geq N$. $\exists n \geq m$: $|s_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, da $s_m = \sup\{a_i \mid i \geq n\}$

5. Gezeigt: $\forall N \in \mathbf{N}\ \exists n \geq N$: $a_n \leq U_\varepsilon(a)$, also a ist HW von (a_n)

Definition: Für eine beschränkte Folge (a_n) heißt $\limsup a_n := \limsup\limits_{n\to\infty} \{a_i \mid i \geq n\}$ der Limes Superior von (a_n). Er ist der größte HW von (a_n). (analog: Limes Inferior)

4.7 Berechnung von Quadratwurzeln

SATZ: Für jeden Startwert $a_0 \in \mathbf{R}^+$ konvergiert die Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)$ gegen $\sqrt{b}$.

Beweisidee:
1. Es gilt $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ (Induktion), $a_n \geq \sqrt{b}\ \ \forall n \geq 1$ und $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \geq 1$
2. (a_n) ist konvergent, da monoton fallend und nach unten beschränkt
3. $\lim a_n = \sqrt{b}$ zeigen mit Trick

4.8 Cauchy-Folgen

Definition: Cauchy Folge

(a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$: $\forall n,m \geq N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
(„*Hinreichend* späte Folgenglieder haben *beliebig* kleinen Abstand“)

Lemma: (1) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge
(2) (a_n) Cauchy-Folge $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

4.9 Das Cauchy-Kriterium

SATZ: Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweisidee:
1. Mit Lemma (2) und Bolzano-Weierstraß hat (a_n) HW h
2. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$, da $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_m - h| < \frac{\varepsilon}{2}$

Bemerkung: Es gilt also: *Supremumsprinzip (V)* $\Rightarrow$ *Konvergenz von monotonen und beschränkten Folgen* $\Rightarrow$ *Bolzano-Weierstraß* $\Rightarrow$ *Cauchy-Kriterium*. Es gilt aber auch:
Cauchy-Kriterium $\Leftrightarrow$ *Supremumsprinzip* $\Leftrightarrow$ *Intervallschachtelungsprinzip*

4.10 Bestimmte Divergenz

Definition: Bestimmte Divergenz

Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent gegen ∞ (also: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$), falls zu jedem $G \in \mathbf{R}$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert mit $a_n \geq G\ \forall n \geq N$.

SATZ: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Dann gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

SATZ: Sei (a_n) Folge mit $a_n > 0\ \forall n$ und $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dann gilt $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

5. Unendliche Reihen

5.1 Der Begriff Reihe

Sei (a_n) eine Folge. $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt n-te <u>Partialsumme</u> von (a_n). Die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := (s_n)$ dieser Partialsummen heißt (unendliche) <u>Reihe</u>. Eine Reihe heißt <u>konvergent</u>, falls die Folge der Partialsummen konvergent ist. Ihr <u>Grenzwert</u> ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

5.2 Die geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbf{R}$. Es gilt: $s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Also: (i) $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

(ii) $|q| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist divergent. (Beweis: Nullfolgenkriterium)

5.3 Beobachtungen zu Reihen

(1) Cauchy-Kriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n,m \geq N: |s_m - s_n| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geq n \geq N: \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

(2) Nullfolgenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(3) Beschränktheitskriterium: Es sei $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ (s_n) beschränkt

5.4 Die harmonische Reihe

<u>SATZ:</u> Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Beweisidee: Teilfolge $\left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i}\right)_{k\geq 1}$ unbeschränkt, da $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq k \cdot \frac{1}{2} + 1$

5.5 Das Leibniz-Kriterium

<u>SATZ:</u> Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist die <u>alternierende</u> Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Beweisidee: $\left|\sum_{i=n}^{m} (-1)^i a_i\right| \leq |a_n| < \varepsilon$, da stets mehr subtrahiert als addiert wird und (a_n) NF

5.6 Absolute Konvergenz

Definition: **Absolute Konvergenz**

$\sum a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_n|$ konvergent ist.

Folgerung: $\sum a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent (Beweis mit Cauchy-Kriterium)

5.7 Das Majoranten-Kriterium

SATZ: Sei $\sum b_n$ absolut konvergent und $|a_n| \le |b_n|$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ absolut konvergent
Man nennt $\sum b_n$ dann eine konvergente Majorante von $\sum a_n$.

Folgerung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert absolut für $k \ge 2$. (Beweis mit Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$)

5.8 Das Quotienten-Kriterium

SATZ: Falls ein $q \in \mathbf{R}$ mit $0 \le q < 1$ existiert und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ $\forall n \in \mathbf{N}$, dann ist auch $\sum a_n$ absolut konvergent. (Beweis mit Majorante $\sum q^n |a_o|$)

5.9 Das Wurzel-Kriterium

SATZ: Falls ein $q \in \mathbf{R}$ mit $0 \le q < 1$ existiert und $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ $\forall n \in \mathbf{N}$, dann ist auch $\sum a_n$ absolut konvergent. (Beweis mit Majorante $\sum q^n$)

5.10 Hinweis zur Anwendung der Kriterien

Es gilt offenbar für jedes $n_0 \in \mathbf{N}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent. Es genügt daher die Bedingungen $|a_n| \le |b_n|$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für $n \ge n_0$ zu zeigen.

5.11 Rechnen mit konvergenten Reihen

SATZ: (a) $\sum a_n$ konvergent und $\sum b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum (a_n + b_n)$ konvergent und $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

(b) $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum c \cdot a_n$ konvergent $\forall c \in \mathbf{R}$ und $\sum c \cdot a_n = c \sum a_n$

Beweisidee: Wende Rechenregeln für Folgen auf Partialsummen an

5.12 Der Umordnungssatz

Definition: **Umordnung**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und τ: $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ eine Bijektion. Man nennt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(\pi)}$ eine <u>Umordnung</u> der gegebenen Reihe.

<u>SATZ:</u> $\sum a_n$ abs. konv. $\Rightarrow$ Jede Umordnung von $\sum a_n$ ist abs. konv. und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(\pi)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

5.13 Der Reihen-Produktsatz

<u>Definition:</u> Produktreihe

Seien $\sum a_m$ und $\sum b_n$ Reihen und τ: $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ mit $(m,n) \mapsto \tau_{(m,n)}$ eine Bijektion. Die Reihe $\sum c_k$ mit $c_{\tau(m,n)} := a_m \cdot b_n$ ist dann die <u>Produktreihe</u> zu $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

<u>SATZ:</u> Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so auch jede Produktreihe $\sum c_k$ zu $\sum a_n$ und $\sum b_n$. Es gilt dann: $\sum c_k = \sum a_n \cdot \sum b_n$.

5.14 Cauchy-Produkt

<u>SATZ:</u> Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum a_n \cdot \sum b_n$

Beweisidee: Bilde die Produktreihe zu $\sum a_n$ und $\sum b_n$ nach *Cauchyschen Diagonalverfahren* und fasse die Glieder einer Schräglinie zusammen.

6. Folgen und Reihen komplexer Zahlen

6.1 Die komplexe Konjugation

<u>Definition:</u> Komplexe Konjugation

Ist $z = x + iy \in \mathbf{C}$ mit $x,y\in\mathbf{R}$, so heißt $\overline{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Es gilt: $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2}$

<u>Eigenschaften der komplexen Konjugation:</u>

(1) $\overline{\overline{z}} = z$ (Konjugation ist eine Involution)

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

6.2 Betrag einer komplexen Zahl

<u>Definition:</u> Betrag einer komplexen Zahl

Für $z = x + iy \in\mathbf{C}$ heißt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der <u>Betrag von z</u> und es gilt $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

<u>Eigenschaften der Betragsfunktion:</u> Für $z,z_1,z_2\in\mathbf{C}$ gilt

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

6.3 Konvergenz von Folgen in C

Definition: (c_n) konvergiert gegen $c \in \mathbf{C}$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N: |c_n - c| < \varepsilon$.

SATZ: Sei (c_n) eine Folge in $\mathbf{C}$, $c_n = a_n + ib_n$ mit $(a_n),(b_n)$ Folgen in $\mathbf{R}$. Sei $c = a + ib$, dann gilt: $c_n \to c \Leftrightarrow a_n \to a$ und $b_n \to b$

Beweisidee: „$\Rightarrow$" mit $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

Korollar: $c_n \to c \Rightarrow \overline{c}_n \to c$

SATZ: (c_n) Cauchy-Folge in $\mathbf{C}$ $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}\, c_n)$ und $(\mathrm{Im}\, c_n)$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbf{R}$.

Korollar: Jede Cauchy-Folge in $\mathbf{C}$ ist konvergent.

SATZ: Seien (c_n) und (d_n) Folgen in $\mathbf{C}$ mit $c_n \to c$ und $d_n \to d$.
Dann gilt:
(1) $c_n + d_n \to c + d$
(2) $c_n \cdot d_n \to c \cdot d$
(3) Falls $d \neq 0$: $\frac{c_n}{d_n} \to \frac{c}{d}$

6.4 Reihen in C

Analog zu $\mathbf{R}$ definiert man Reihe $\sum c_n$ komplexer Zahlen, Konvergenz und absolute Konvergenz einer komplexen Reihe. Wie in $\mathbf{R}$ beweist man Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium. (aber nicht Leibniz-Kriterium!)

7. Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus

7.1 Die komplexe Exponentialfunktion

Für $z \in \mathbf{C}$ ist die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent. (Quotientenkriterium)

Definition: Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt (komplexe) Exponentialfunktion.

$e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ heißt Eulersche Zahl.

7.2 Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

SATZ: Für $z, w \in \mathbf{C}$ gilt: $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Beweisidee: Anwendung des Reihenproduktsatzes (Cauchy-Produkt + Binomischer Satz)

Folgerungen aus der Funktionalgleichung: Sei $z \in \mathbf{C}$

(1) Es gilt $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$,
also $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $\forall z \in \mathbf{C}$

(2) Für $x \in \mathbf{R}$ ist $\exp(x) > 0$, für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$

Beweisidee: Für x>0 ist $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... > 1$

Für x<0: $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1 \Rightarrow \exp(x) > 0$

(3) Für $n \in \mathbf{N}$ ist $\exp(n) = \exp(1+1+...+1) = \exp(1) \cdot ... \cdot \exp(1) = e \cdot ... \cdot e = e^n$

und $\exp(-n) = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$. Ferner gilt: $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e}$, da $(\exp(\frac{1}{n}))^n = e$.

Zusammenfassend gilt also: $\exp(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}$

<u>Definition:</u> Restglieder der Exponentialreihe

Für $z \in \mathbf{C}$ und $n \in \mathbf{N}$ sei $R_n(z) := \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ das n-te <u>Restglied</u> der Exponentialreihe.

<u>Lemma:</u> Für $|z| \leq 1$ gilt $|R_n(z)| < 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Beweisidee: Betrachte $|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}|$, Dreiecksungleichung, $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ ausklammern

<u>SATZ:</u> $e \notin \mathbf{Q}$, d.h. e ist *irrational*

Beweisidee: Betrachte $R_n(1) = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, daraus folgt $R_n(1) \geq \frac{1}{n!}$,

Widerspruch zur Restgliedabschätzung

7.3 Sinus- und Cosinusfunktion

<u>Definition:</u> Sinus und Cosinus

$\cos x := \mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sin x := \mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

heißen <u>Cosinus</u> und <u>Sinus</u> von $x \in \mathbf{R}$.

<u>Eigenschaften von Sinus und Cosinus:</u> (1) $\cos(-x) = \cos x$ $\forall x \in \mathbf{R}$ („gerade Fkt.“)

$\sin(-x) = -\sin x$ $\forall x \in \mathbf{R}$ („ungerade Fkt.“)

(2) $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

(3) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ (Beweis mit $|\exp(ix)|^2$)

<u>Additionstheoreme:</u> $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\forall x,y \in \mathbf{R}$

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\forall x,y \in \mathbf{R}$

Beweisidee: Betrachte $\exp(i \cdot (x+y))$

Kapitel 3: Stetige Funktionen

8. Grenzwerte und Stetigkeit

8.1 Berührpunkte einer Menge

Definition: Berührpunkt, Abschluß

Ein Punkt $a \in \mathbf{R}$ heißt Berührpunkt von $D \subset \mathbf{R}$, falls in jeder ε-Umgebung von a ein Punkt aus D liegt, d.h. a Berührpunkt von D $\Leftrightarrow \exists\, (a_n)$ in D mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$\overline{D}$ ist der Abschluß von D (d.h. Menge der Berührpunkte von D).

D heißt abgeschlossen, falls $D = \overline{D}$ ist.

Beispiel: $D = \mathbf{Q}$ und $\overline{D} = \mathbf{R}$

8.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition: Grenzwerte von Funktionen

f konvergiert für $x \to a$ gegen $b \in \mathbf{R}$ (d.h. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$), heißt:

Für jede Folge (a_n) in $D \subset \mathbf{R}$ mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ gilt $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

Der Grenzwert b ist eindeutig bestimmt und wird mit $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bezeichnet.

Der Grenzwertbegriff ist *lokal*, d.h. man kann das Konvergenzverhalten auch auf einem kleinen Bereich um a (d.h. $D \cap U_\varepsilon(a)$) untersuchen.

Definition: Einseitige Grenzwerte

Es sei a ein Berührpunkt von $D \cap]-\infty,a]$. Dann gilt:

$f(x) \xrightarrow[x\uparrow a]{} b$:⇔ Für jede Folge (a_n) in $D \cap]-\infty,a]$ mit $a_n \to a$ gilt $f(a_n) \to b$

(analog: $f(x) \xrightarrow[x\downarrow a]{} b$)

Bezeichnung: $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$

Definition: $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} b$:⇔ Für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ gilt $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

(analog: $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} b$)

Bezeichnung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Wichtiges Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{\exp(x)} = 0 \;\forall m \in \mathbf{N}$ (d.h. exp wächst schneller als alle Potenzen)

Beweisidee: Betrachte $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \geq \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}$ für x>0 und setze a_n ein

8.3 Die Grenzwertsätze

SATZ: Seien f,g: $D \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{D}$. Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existieren, dann

gilt:

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) \;\forall c \in \mathbf{R}$

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, falls $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Beweisidee: Rechenregeln für konvergente Folgen

8.4 Die εδ-Formulierung des Grenzwertbegriffs

SATZ: Sei f: $D \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{D}$. Dann gilt:

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

(„f(x) liegt *beliebig* nahe an b, falls x *hinreichend* nahe an a liegt“)

8.5 Der Stetigkeitsbegriff

Definition: Stetigkeit

Sei f: $D \to \mathbf{R}$ mit $D \subset \mathbf{R}$

(1) f heißt <u>stetig</u> in $a \in D$ falls gilt: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

(2) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt von D stetig ist

SATZ: Falls f,g: $D \to \mathbf{R}$ in $a \in D$ stetig sind, dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ für $c \in \mathbf{R}$ stetig in a. Falls zusätzlich $f(a) \neq 0$ ist, ist auch $\frac{1}{f}: D \setminus \{x \in D | f(x) = 0\} \to \mathbf{R}$ stetig in a.

Beweisidee: Grenzwertsätze

Korollar: Die Menge $C(D,\mathbf{R}) := \{f: D \to \mathbf{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen von D nach $\mathbf{R}$.

8.6 Die εδ-Formulierung der Stetigkeit

SATZ: Sei f: $D \to \mathbf{R}$, $a \in D$. Dann gilt.

$$f \text{ ist stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

(„f(x) liegt *beliebig* nahe an f(a), falls x *hinreichend* nahe an a liegt“)

SATZ: Seien f: $D \to \mathbf{R}$ mit $D \subset \mathbf{R}$, g: $E \to \mathbf{R}$ mit $E \subset \mathbf{R}$ mit $f(D) \subset E$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \in D \text{ und } g \text{ stetig in } f(a) \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ stetig in } a$$

(Beweis mit Folgen oder εδ-Formulierung)

9. Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

9.1 Der Zwischenwertsatz

SATZ: Eine stetige Funktion f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ nimmt jeden Wert zwischen f(a) und f(b) an, d.h.: Ist $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$, so ex. ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

Beweisidee: O.B.d.A $f(a)<y<f(b)$, betrachte $M := \{t \in [a,b] | f(t) \leq y\}$, mit (V) $x := \sup M$, 1. $x_n \to x$, $f(x_n) \leq y \Rightarrow f(x) \leq y$, insb. $x<b$ 2. $\forall t \in]x,b]$ ist $f(t) > y \Rightarrow f(x) \geq y$

9.2 Maxima und Minima

SATZ: Eine stetige Funktion f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ hat ein Maximum und ein Minimum, d.h. Es ex. $p,q \in [a,b]$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ $\forall x \in [a,b]$

Beweisidee: Betrachte $\sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$, $\exists(x_n)$ in [a,b], Bolzano-Weierstraß

Korollar: f: [a,b]→ **R** stetig ⇒ f([a,b]) ist ein kompaktes Intervall

Beweisidee: Minumum f(p) und Maximum f(q) ex., f([a,b]) = [f(p),f(q)] mit ZWS zeigen

9.3 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Definition: Streng monoton wachsend

Eine Funktion f: D→**R** heißt streng monoton wachsend, falls ∀x,y∈D gilt:

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (analog: streng monoton fallend)

SATZ: Sei f: [a,b]→ **R** stetig und streng monoton wachsend, A:= f(a) und B:= f(b).
Dann ist f: [a,b]→ [A,B] bijektiv und f^{-1}: [A,B]→ [a,b] ist stetig.
(analog für streng monoton fallend)

Kapitel 4: Differenzierbare Funktionen

10. Differenzierbarkeit

Definition: Differenzierbarkeit, Ableitung

Sei I⊂**R** ein Intervall und f: I→ **R**

(1) f heißt differenzierbar in a∈I, falls der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Falls er existiert bezeichnet man ihn mit $f'(a)$ und nennt ihn die Ableitung von f in a.

(2) f heißt differenzierbar, falls f in jedem Punkt a∈I differenzierbar ist. Die Funktion $f': I\to\mathbf{R},\ x\mapsto f'(x)$ heißt dann die Ableitung von f.

Alternative Formulierung: $f'(a) := \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Lemma: f diffbar in a ⇒ f stetig in a (Beweis mit GWS)

Wichiges Beispiel: exp ist differenzierbar mit $\exp' = \exp$

Beweisidee: $|\exp(h) - (1+h)| \le |h^2|$ für $|h| \le 1$mit Restgliedabschätzung

10.1 Summen-, Produkt- und Quotientenregel

SATZ: Seien f,g: I→ **R** in a differenzierbar. Dann gilt:

(1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(2) $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$, falls $g(a)\neq 0$

Beweisidee: Ergänze Differenzenquotienten, Quotientenregel mit $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$

10.2 Die Kettenregel

Lemma: Für eine Funktion f: I→ **R** sind äquivalent:
(i) f ist in a∈I diffbar
(ii) Es gibt eine in a stetige Funktion φ: I→**R** mit f(x) - f(a) = (x-a) φ(x) ∀x∈I
Es gilt dann φ(a) = $f'(a)$

Beweisidee: (ii)⇒(i) Differenzenquotient bilden und Stetigkeit ausnutzen
(i)⇒(ii) Definiere φ, aus diffbar in a folgt stetig in a

SATZ: Sei f: I→**R** in a diffbar, sei J⊂**R** ein Intervall mit f(I)⊂ J und g: J→**R** in b:= f(a) diffbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ diffbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Beweisidee: Mit vorigem Lemma gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot \psi(f(x))}{x - a}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(f(x))}{x - a} = \varphi(a) \cdot \psi(f(a)) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$

10.3 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

SATZ: Sei f: [a,b]→**R** diffbar und streng monoton mit $f'(x) \neq 0$ für x∈[a,b].
Dann ist auch f^{-1} in y = f(x) diffbar und $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Beweisidee: 1. f^{-1} ist stetig 2. Betrachte Folge (y_n) in f([a,b]) mit $y_n \to y$, $y_n \neq y$ ∀n
3. Also $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$, weiter mit Differenzenquotient und $x_n := f^{-1}(y_n)$

Wichtiges Beispiel: exp ist diffbar, streng monoton steigend und es ist exp(**R**)= $\mathbf{R}^+$ (ZWS).
Mit Satz folgt daher ln:= $\exp^{-1}$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ist diffbar und $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Funktionalgleichung: ln(x·y) = ln(exp(ln(x) + ln(y))) = ln(x) + ln(y).

11. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

11.1 Lokale Extrema

Definition: Lokales Extremum
Sei f:]a,b[→ **R** und c∈]a,b[. Dann gilt: f hat in c ein <u>lokales Maximum</u> bzw. <u>Minimum</u>, falls ein ε>0 existiert mit f(c) ≥ f(x) bzw. f(c) ≤ f(x) $\forall x \in U_\varepsilon(c) \cap]a,b[$

SATZ: Sei f:]a,b[→ **R** diffbar.
Falls f in c∈]a,b[ein lokales Extremum hat, dann gilt $f'(c) = 0$.

Beweisidee: O.B.d.A c lokales Maximum. Für c<x<c+ε gilt $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, d.h. $f'(c) \leq 0$

Für c-ε<x<c gilt $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, d.h. $f'(c) \geq 0$. Da f diffbar in a $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$

11.2 Satz von Rolle

SATZ: Sei f: [a,b] $\rightarrow$ **R** stetig und in]a,b[diffbar.
Falls f(a) = f(b) gilt, so existiert $c \in$]a,b[mit $f'(c) = 0$.

Beweisidee: 1. Satz über Maxima und Minima (Stetigkeit) 2. Satz über lokale Extrema.

11.3 Der Mittelwertsatz

SATZ: Sei f:[a,b] $\rightarrow$ **R** stetig und in]a,b[diffbar. Dann existiert ein Punkt $c \in$]a,b[mit
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (= Steigung der Sekante durch (a,f(a)) und (b,f(b)))

Beweisidee: 1. Betrachte Hilfsfunktion h: [a,b] $\rightarrow$ **R** mit $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$
2. Es ist h(a) = h(b) = f(a) $\Rightarrow$ Satz von Rolle

11.4 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Sei f: [a,b] $\rightarrow$ **R** stetig und in]a,b[diffbar.

Folgerung 1: $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad$ f konstant

Beweisidee: Betrachte $x,y \in [a,b]$ bel. mit x<y, dann MWS auf $f_{[x,y]}$ anwenden

Folgerung 2: (1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad$ f monoton steigend
(2) $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad$ f streng monoton steigend

Folgerung 3: Sei f zweimal diffbar und $c \in$]a,b[.
Dann gilt: $\left.\begin{matrix} f'(c) = 0 \\ f''(c) > 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad$ f hat in c ein *isoliertes* lokales Minimum

11.5 Der verallgermeinerte Mittelwertsatz

SATZ: Seien f,g: [a,b] $\rightarrow$ **R** stetig und in]a,b[diffbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$.
Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in$]a,b[mit $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
(Bem.: Der MWS ist der Spezialfall g(x) = x)

Beweisidee: Hilfsfunktion h: [a,b] $\rightarrow$ **R** mit $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$,
Satz von Rolle

11.6 Die Regel von de l'Hospital

SATZ: Seien f,g:]a,b[$\rightarrow$ **R** diffbar und $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$.
Ferner gelte (1) $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ für $x \downarrow a$ (oder $x \uparrow b$ oder $x \rightarrow \infty$)

oder (2) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \downarrow a$ (oder $x \uparrow b$ oder $x \to \infty$)

Falls der Grenzwert $A := \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Wichtige Beispiele:

(1) Mit l'Hospital gilt für a>0: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\exp(ax)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a \cdot \exp(ax)}{1} = \infty$.

Damit gilt für $n \in \mathbf{N}$: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\exp(\frac{1}{n} x)}{x} \right)^n = \left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\exp(\frac{1}{n} x)}{x} \right)^n = \infty$

(„exp(x) wächst *schneller* als jede Potenz von x")

(2) Mit l'Hospital gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

(„ln(x) wächst *langsamer* als jede Potenz von x")

11.7 Allgemeine Potenzen

Definition: Allgemeine Potenz

Für $x \in \mathbf{R}$ ist $e^x := \exp(x)$ und für $a \in \mathbf{R}^+$ ist $a^x := e^{x \cdot \ln a}$.

Mit der Funktionalgleichung folgt $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

12. Funktionenfolgen und –reihen, gleichmäßige Konvergenz

12.1 Funktionenfolgen und -reihen

Definition: Punktweise Konvergenz

Sei $D \subset \mathbf{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n: D \to \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ und $f: D \to \mathbf{R}$ gegeben.

(i) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, falls gilt:
Für jedes $x \in D$ konvergiert $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ gegen f(x).
(d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$)

(ii) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise gegen f, falls die Folge der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{i=0}^{n} f_i$ punktweise gegen f konvergiert.

Wichtiges Beispiel: (f_n) mit $f_n: [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

(Beachte: alle f_n sind stetig, aber f nicht)

Definition: Gleichmäßige Konvergenz

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(„In jedem ε-Schlauch um f liegen fast alle f_n")

Klar: (f_n) gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ (f_n) punktweise konvergent

12.2 Die Supremumsnorm

Definition: **Beschränktheit einer Folge**

f heißt beschränkt, falls $\exists c \in \mathbf{R}\ \forall x \in D$: $-c \le f(x) \le c$.

$B(D,\mathbf{R}) := \{f: D \to \mathbf{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$ ist ein $\mathbf{R}$-Vektorraum und für $f \in B(D,\mathbf{R})$ existiert $\sup\{\,|f(x)| \mid x \in D\,\}$.

Definition: **Supremumsnorm**

Sei $f \in B(D,\mathbf{R})$. $\| f \| := \sup\{\,|f(x)| \mid x \in D\,\}$ heißt die Supremumsnorm von f.

Lemma: Für eine Folge von Funktionen $f_n: D \to \mathbf{R}$ gilt:

$(f_n) \xrightarrow{glm} f \quad \Leftrightarrow \quad$ (Fast alle $f_n - f$ liegen in $B(D,\mathbf{R})$ und) $\| f_n - f \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Beweisidee: $\forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \ge N\ \forall x \in D$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \ge N$: $\|f_n-f\|<\varepsilon$

Eigenschaften der Supremumsnorm: Für $f,g \in B(D,\mathbf{R})$ und $c \in \mathbf{R}$ gilt:

(1) $\| f \| \ge 0$, $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(2) $\| c \cdot f \| = |c| \cdot \| f \|$

(3) $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$

12.3 Cauchy-Kriterium für Funktionenfolgen

SATZ: Für eine Folge von Funktionen $f_n: D \to \mathbf{R}$ gilt:

(f_n) gleichmäßig konvergent $\quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m,n \ge N\ \| f_n - f_m \| < \varepsilon$

Beweisidee: (i)$\Rightarrow$(ii) 0-Ergänzung, Dreiecksungleichung

(ii)$\Rightarrow$(i) $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbf{R}$, also $f_n \xrightarrow{ptw} f$, damit ist für $x \in D$ und $m \in \mathbf{N}$ fest: $| f(x) - f_m(x) | = \lim\limits_{n\to\infty} | f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon$

12.4 Rechnen mit gleichmäßig konvergenten Folgen

SATZ: Seien (f_n), (g_n) Funktionenfolgen von $D \to \mathbf{R}$ mit $f_n \xrightarrow{glm} f$ und $g_n \xrightarrow{glw} g$,

dann gilt: $\quad f_n + g_n \xrightarrow{glm} f + g \quad$ und $\quad c \cdot f_n \xrightarrow{glm} c \cdot f \quad$ für $c \in \mathbf{R}$

12.5 Stetigkeit der Grenzfunktion

SATZ: Seien $f_n: D \to \mathbf{R}$ stetig. Falls (f_n) gleichmäßig konvergent ist, dann ist auch die Grenzfunktion $f := \lim(f_n)$ stetig.

Beweisidee: $\varepsilon\delta$-Definition, $\frac{\varepsilon}{3}$ wählen und 2 mal Dreiecksungleichung

12.6 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

SATZ: Seien $f_n: [a,b] \to \mathbf{R}$ diffbare Funktionen. Falls (f_n') gleichmäßig konvergent ist und $(f_n(x_0))_{n\in\mathbf{N}}$ für ein $x_0 \in [a,b]$ konvergent ist, dann gilt:

(i) (f_n) ist gleichmäßig konvergent

(ii) Die Grenzfunktion $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ist diffbar mit $f' = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

(„Limes und Ableitung sind vertauschbar“)

Korollar: (a) Seien f_n: $D \to \mathbf{R}$ stetig. Falls $\sum f_n$ glm. kgt. ist, so stellt die Grenzfunktion eine stetige Funktion dar.

(b) Seien f_n: $[a,b] \to \mathbf{R}$ diffbar. Falls $\sum f_n'$ glm. kgt. ist und $\sum f_n(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$ kgt. ist, dann gilt:

$$f := \sum f_n \text{ ist glm. kgt. und es ist } f' = \left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$$

(„*Gliedweises Differenzieren*“)

12.7 Das Weierstraß-Kriterium

SATZ: Seien f_n: $D \to \mathbf{R}$. Dann gilt:

$\sum \| f_n \|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum f_n$ glm. kgt. & $\sum | f_n |$ glm. kgt.

(Bemerkung: Damit sind alle anderen Kriterien für Reihen anwendbar)

Beweisidee: $\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} | f_k | \right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \| | f_k | \| = \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| < \varepsilon$,mit Cauchy für Zahlenfolgen und für Funktionenfolgen ist $(s_n) = \sum | f_n |$ glm. kgt

12.8 Potenzreihen

Definition: Potenzreihen

Seien f_n: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Funktionen mit $f_n(x) = a_n x^n$ wobei $a_n \in \mathbf{R}$.

Die Reihe $\sum f_n$ heißt dann <u>Potenzreihe</u>.

12.9 Der Konvergenzradius

SATZ: Sei $R := \sup\{x \ge 0 \mid \sum a_n x^n \text{ kgt.}\}$ der <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe $\sum a_n x^n$, $R \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Dann gilt:

(1) $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ absolut konvergent

$|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ divergent

(2) $\sum a_n x^n$ konvergiert in jedem Intervall $[-r,r]$, wo $r<R$ ist gleichmäßig.

12.10 Die Formel von Hadamard

SATZ: Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe. Für den Konvergenzradius von $\sum a_n x^n$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, \text{ falls } R = \infty \\ \infty, \text{ falls } R = 0 \\ \frac{1}{R}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweisidee: Falls $\frac{1}{r} < \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$,d.h. $1 < |a_n| \cdot r^n$ für ∞-viele n, also $\sum a_n r^n$ div. nach NF-Kriterium, somit $r \ge R$. Falls $\frac{1}{r} > \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $\exists c \in \mathbf{R}: 0<c<1$ s.d. $c^n > |a_n| \cdot r^n$ f.f.a. n, also $\sum a_n r^n$ kgt. nach Majoranten-Kriterium, somit $r \le R$.

12.11 Differenzierbarkeit von Potenzreihen

SATZ: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R>0. Dann gilt:

(1) $\sum a_n x^n$ stellt in]-R,R[eine beliebig oft diffbare Funktion f dar.

(2) Für $x \in]-R,R[$ gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ („*Gliedweises Differenzieren*“)

Beweisidee: Es genügt zu zeigen, daß die Ableitung ebenfalls Konvergenzradius R hat.

12.12 Die trigonometrischen Funktionen – die Zahl π

Definition: Die Zahl π

Aus $\cos(2) \le -\frac{1}{3}$ und $\cos(0) = 1$ folgt mit dem ZWS, daß cos in [0,2] eine positive Nullstelle hat. Also ist $M := \{x \in \mathbf{R}^+ | \cos(x) = 0\}$ nicht leer. $\pi := 2 \cdot \inf M$

SATZ: exp: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist periodisch mit der Periode 2πi, d.h. $e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbf{C}$

Beweisidee: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (e^{\frac{\pi}{2} i})^4 = e^z \cdot i^4 = e^z \cdot 1$, da $e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

Folgerung: cos: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und sin: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sind periodisch mit der Periode 2π, d.h.

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \forall x \in \mathbf{R}$

SATZ: (1) cos hat auf **R** genau die Nullstellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$

(2) sin hat auf **R** genau die Nullstellen $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$

Folgerung: (1) 2π ist die kleinste positive Periode von cos und sin.

(2) Für die komplexe Exponentialfunktion $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \exp(z) = e^z$ gilt:

$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbf{Z}: z = k \cdot 2\pi i$

12.13 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

(1) arcsin: $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist differenzierbar in]-1,1[mit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$ ist differenzierbar in]-1,1[mit $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) arctan: $\mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist differenzierbar mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

13. Der Satz von Taylor

13.1 Höhere Ableitungen

Definition: Höhere Ableitungen

Sei f: $I \to \mathbf{R}$. f heißt <u>zweimal diffbar</u>, falls f diffbar ist und $f': I \to \mathbf{R}$ diffbar ist.

Induktiv: f heißt <u>k-mal diffbar</u> ($k \ge 2$), falls f (k-1)-mal diffbar ist und die (k-1)-te Ableitung $\underline{f^{(k-1)}}$ diffbar ist.

Definition: (1) f heißt k-mal <u>stetig diffbar</u>, falls f k-mal diffbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist.
(2) f heißt <u>unendlich oft differenzierbar</u>, falls $\forall k>0$ $f^{(k)}$ existiert.

Bezeichnungen: $C^k(I) := \{ f: I \to \mathbf{R} \mid f$ k-mal stetig diffbar $\}$
$C^\infty(I) := \{ f: I \to \mathbf{R} \mid f$ ∞-oft diffbar $\}$

13.2 Taylorpolynome

Lemma: Sei $f: I \to \mathbf{R}$ n-mal diffbar in $a \in I$. Dann existiert genau eine Polynomfunktion $T = T_{n,f,a}: I \to \mathbf{R}$ vom Grad $\leq n$ mit $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$, ... , $T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$,

nämlich: $$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$T_{n,f,a}$ heißt das n-te <u>Taylorpolynom</u> von f im Punkt a.

Beweisidee: Entwicklung über $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k$ mit $p(a) = c_0 = f(a)$
... $p^{(k)}(a) = k! \cdot c_k = f^{(k)}(a)$

Definition: **Restglieder**
$R_{n,f,a} := f - T_{n,f,a}$ heißt das n-te <u>Restglied</u> von f in a.

13.3 Der Satz von Taylor

SATZ: Sei $f: I \to \mathbf{R}$ (n+1)-mal diffbar, $a \in I$. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl c zwischen x und a mit: $$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$ („*Lagrange'sches Restglied*")

Beweisidee: Betrachte $\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}$, (n+1)-mal Nullergänzung und VMWS

13.4 Anwendung 1: Bestimmung lokaler Extrema

SATZ: Sei $f: I \to \mathbf{R}$ (n+1)-mal stetig diffbar. Angenommen, es gilt für einen Punkt $a \in I$ $f'(a) = 0$, ... , $f^{(n)}(a) = 0$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Dann gilt:
(1) $f^{(n+1)}(a) > 0$ und n ungerade $\Rightarrow$ f hat in a ein strenges lokales Minimum
(2) $f^{(n+1)}(a) < 0$ und n ungerade $\Rightarrow$ f hat in a ein strenges lokales Maximum
(3) n gerade $\Rightarrow$ f hat in a kein Extremum

Beweisidee: Lagrange'sches Restglied

13.5 Anwendung 2: Qualitative Taylorformel

SATZ: Sei $f: I \to \mathbf{R}$ (n+1)-mal stetig diffbar und $a \in I$. Dann existiert eine in a stetige Funktion $r: I \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = T_{n,f,a}(x) + (x-a)^n \cdot r(x)$.
(Anders: $\lim_{x \to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ wegen Stetigkeit)

13.6 Taylor-Reihen

Definition: **Taylorreihen**

Sei f: $I \to \mathbf{R}$ ∞-oft diffbar und $a \in I$. Die Reihe $T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$

heißt Taylorreihe von f in a.

Bemerkungen zu Taylorreihen:

(1) Ist f durch ein Potenzreihe gegeben, d.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so gilt $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(2) Der Konvergenzradius von $T_{f,a}$ hann gleich null sein. Selbst wenn $T_{f,a}(x)$ konvergiert, muß nicht $T_{f,a}(x) = f(x)$ gelten.

(3) Es gilt: $T_{f,a}(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n,f,a}(x) = 0$

Kapitel 5: Integrierbare Funktionen

14. Das Integral für Regelfunktionen

14.1 Treppenfunktionen

Definition: **Treppenfunktion**

Eine Treppenfunktion auf I ist eine Funktion φ: $I \to \mathbf{R}$, zu der eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ existiert, so daß φ auf jedem offenen Teilintervall $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \le i \le n$ konstant ist.

Definition: **Integral für Treppenfunktionen**

Sei φ: $I \to \mathbf{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung, so daß $\varphi(x) = c_i$ für $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Das Integral von φ ist definiert durch

$$\int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\substack{\text{Wert von } \varphi \text{ im} \\ \text{i-ten Teilintervall}}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{Länge des i-ten} \\ \text{Teilintervalls}}}$$

Bemerkung: $\int_a^b \varphi$ ist *wohldefiniert*, d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung

14.2 Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen

SATZ: Sei $T(a,b) := \{ \varphi: I \to \mathbf{R} \mid \varphi \text{ Treppenfunktion} \}$. Es gilt:

(1) T(a,b) ist ein Untervektorraum von B(a,b).

(2) Die Integralabbildung $T(a,b) \to \mathbf{R}$, $\varphi \mapsto \int \varphi$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Für $\varphi, \psi \in T(a,b)$ gilt: $\int \varphi + \psi = \int \varphi + \int \psi$

$\int c \cdot \varphi = c \cdot \int \varphi \quad \forall c \in \mathbf{R}$ („*Linearität*“)

(ii) $\varphi \le \psi \Rightarrow \int \varphi \le \int \psi$ („*Monotonie*“)

(iii) $\left|\int_a^b \varphi\right| \le \int_a^b |\varphi| \le \underbrace{(b-a)}_{\text{Länge des Intervalls}} \cdot \underbrace{\|\varphi\|}_{\text{größter Wert der Fkt.}}$ („*Beschränktheit*“)

(„Die Integralabbildung ist eine monotone, beschränkte *Linearform* auf T(a,b)“)

Beweisidee: Bilde jeweils die Vereinigung der Unterteilungen

14.3 Regelfunktionen

Definition: Regelfunktionen

Eine Funktion f: I→ **R** heißt Regelfunktion, falls zu jedem ε>0 eine Treppenfunktion $\varphi \in T(a,b)$ existiert mit $\| f_n - \varphi \| < \varepsilon$.

(„In jedem *ε-Schlauch* um f liegt eine Treppenfunktion“)

Anders: f Regelfunktion ⇔ ∃ Folge (φ_n) von Treppenfunktionen, $\varphi_n \in T(a,b)$, die gleichmäßig gegen f konvergiert

⇔ ∃ Folge (φ_n) mit $\varphi_n \in T(a,b)$ und $\| \varphi_n - f \| \to 0$

14.4 Charakterisierung der Regelfunktionen

SATZ: Für eine Funktion f: I→ **R** sind äquivalent:

(i) f Regelfunktion

(ii) Für jedes $c \in]a,b[$ existiert $\lim_{x \uparrow c} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ und es existieren $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow b} f(x)$.

(„Alle *einseitigen Grenzwerte* existieren“)

Korollar: (1) Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

(2) Jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.

Wichtiges Beispiel: Die *Dirichlet-Funktion* mit f: [0,1]→ **R** und $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \notin Q \\ 1, & x \in Q \end{cases}$ ist keine Regelfunktion, denn die einseitigen Grenzwerte existieren in keinem Punkt.

14.5 Das Regelintegral

SATZ: Sei f: [a,b]→ **R** eine Regelfunktion.

(1) Für jede Folge (φ_n) in T(a,b), die glm. gegen f konvergiert, existiert $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n$.

(2) Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n$ hängt nicht von der Wahl der Folge (φ_n) ab.

Definition: Regelintegral

$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n$ heißt das Integral von f über [a,b].

14.6 Eigenschaften des Regelintegrals

SATZ: Sei R(a,b):={ f: [a,b]→ **R** | f Regelfunktion }. Es gilt $T(a,b) \subset R(a,b) \subset B(a,b)$ und

(1) R(a,b) ist ein Vektorraum

(2) Die Integralabbildung $R(a,b) \to \mathbf{R},\ f \mapsto \int_a^b f$ hat folgende Eigenschaften:

Für $f,g \in R(a,b)$ gilt: (a) $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad \forall c \in \mathbf{R}$ („Linerität“)

(b) $f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$ („Monotonie“)

(c) $\int_a^b f \le \int_a^b |f| \le (b-a) \cdot \|f\|$ („Beschränktheit“)

Beweisidee: Mit den Eigenschaften über Treppenfunktionen

14.7 Vertauschung von Integration und Limes

<u>SATZ:</u> Sei (f_n) eine glm. kgt. Folge von Regelfunktionen f_n: $[a,b] \to \mathbf{R}$. Dann gilt:
Die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ ist auch eine Regelfunktion und es gilt

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \ .$$

D.h. man kann den Raum R(a,b) nicht durch die Grenzfunktionen erweitern.

14.8 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

<u>SATZ:</u> Sei f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit $\int_a^b f = (b-a) \cdot f(c)$

Beweisidee: Es ex. Max. t und Min. s, mit Beschränktheit $s \cdot (b-a) \le \int_a^b f \le t \cdot (b-a)$, ZWS

14.9 Bereichsadditivität des Integrals

<u>Lemma:</u> Sei f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ und $c \in [a,b]$. Es gilt:

$f \in R(a,b) \Leftrightarrow f|_{[a,c]} \in R(a,c)$ & $f|_{[c,b]} \in R(c,b)$ und $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Beweisidee: Betrachte zugehörige Treppenfunktionen

<u>Vereinbarungen:</u>

(1) $\int_b^a f = -\int_a^b f$

(2) Statt $\int_a^b f$ schreibt man auch $\int_a^b f(x)dx$ und nennt x die <u>Integrationsvariable</u>.

15. Integration und Differentiation

15.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

SATZ: Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f: I \to \mathbf{R}$ eine Regelfunktion.

(1) Die Funktion $F: I \to \mathbf{R}$ mit $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ ist stetig.

(2) Falls f stetig ist, dann ist F differenzierbar und $F' = f$.
(„F ist eine *Stammfunktion* zu f“)

Beweisidee: (1) Betrachte $c_n \to c$, zeige $F(c_n) \to F(c)$ mit Bereichsadditivität
(2) Betrachte $c_n \to c$, zeige damit $F'(c) = f(c)$ mit Bereichsadditivität, MWS (mit $\tilde{c}_n$ zwischen c und c_n), Stetigkeit: $f(\tilde{c}_n) \to f(c)$

15.2 Anwendung des HDI zur Berechung von Integralen

Folgerung: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) =: [G]_a^b$ wobei $G = F + \text{const}$

15.3 Substitutionsregel

SATZ: Sei $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und $g: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig diffbar.

Dann gilt: $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

Beweisidee: Wähle G Stammfunktion zu f und Kettenregel auf $(G \circ g)'(t)$ + HDI

15.4 Partielle Integration

SATZ: Seien $f,g: [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig diffbar.

Dann gilt: $\int f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$

Beweisidee: Produktregel für Ableitungen und HDI

Wichtiges Beispiel:

$$\int_a^b \ln x \, dx = \int_a^b \ln x \cdot x' \, dx = [\ln x \cdot x]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot x \, dx = [\ln x \cdot x]_a^b - [x]_a^b = [x \cdot \ln x - x]_a^b$$

15.5 Uneigentliche Integrale

Definition: Sei $f: [a,\infty[\to \mathbf{R}$ mit $f|_{[a,b]} \in R(a,b)$ $\forall b>a$.

Der Grenzwert $\int_a^\infty f := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$ heißt das <u>uneigentliche Integral</u> von f, *falls er existiert*.

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} [-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b} + 1) = 1$

Definition: Sei $f: (a,b] \to \mathbf{R}$ mit $f|_{[c,b]} \in R(c,b)$ $\forall c>a$.

Der Grenzwert $\int_a^b f := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f$ heißt das <u>uneigentliche Integral</u> von f, *falls er existiert*.

<u>Beispiel:</u> $\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \ln x \, dx = \lim_{c \downarrow 0} [x \cdot \ln x - x]_c^1 = \lim_{c \downarrow 0} (-1 - \underbrace{c \cdot \ln c}_{\to 0} + c) = -1$